京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	Nonlinear Fefferman-Phongの不等式とGinzburg-Landau Systemへの応用 (調和解析学と非線形偏微分方程式)
Author(s)	堀畑, 和弘
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1162: 91-98
Issue Date	2000-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/64267
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
1162 巻 2000 年 91-98

Nonlinear Fefferman-Phong の不等式と Ginzburg-Landau System への 応用

堀畑和弘 (東北大学・大学院理学研究科)

1999 年 7 月 23 日

1 Ginzburg-Landau System

d を 自然数とし、$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を 境界が滑らかな有界領域とする。

$$\begin{aligned} u_0 &: \Omega \to \mathbb{R}^d \\ &\quad \Psi \\ &\quad x \to (u_0^1(x), u_0^2(x), \cdots, u_0^d(x)), \\ |u_0| &= 1 \qquad \text{a.e} \quad x \in \Omega, \\ u_0, \nabla u_0 &\in L^2 \end{aligned}$$

なる写像 u_0 を 任意の一つ与える。また $\lambda > 0$ とする。

Definition 1 $u_\lambda = (u_\lambda^1, u_\lambda^2, \cdots, u_\lambda^d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ が (λ を パラメーターとする) GL であるとは u_λ が 次の方程式系の解である事を言う。即ち、

$$-\triangle u + \lambda(|u|^2 - 1)u = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u = u_0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \tag{2}$$

但し、上の文章中で 解とは、u_λ が $W^{1,2}$ に属し かつ(1) を超関数の意味で (2) を広義の境界値の意味で、それぞれ満たすとする。

Remark 1 ([p. xvii, 1] or [4]) (1) は Ginzburg-Landau System と 呼ばれる。また $d = 2$ の時、$|u_\lambda|$ は 第 II 種超伝導体中の磁束線の超伝導の度合を表わす。即ち

$$|u_\lambda| = \begin{cases} 0 & \text{正常 (非超伝導) 状態}, \\ 1 & \text{超伝導状態} \end{cases}$$

となる。従って 超伝導状態の中の正常な状態 i.e. $|u_\lambda| = 0$ となる点が どの位あるのかは興味深い問題である。

Remark 2 (Bochner Inequality)

$$e_\lambda(u_\lambda) \;:=\; \frac{1}{2}\Big(|\nabla u_\lambda|^2 \,+\, \frac{\lambda}{2}\left(|u_\lambda|^2 \,-\, 1\right)^2\Big) \tag{3}$$

とおくと、e_λ は 以下の微分不等式を 満たす事が分かる。

$$-\Delta e_\lambda \;\le\; {}^{\exists}C\, e_\lambda^2. \tag{4}$$

以後 C は 正の generic な定数とする。(3) で 定義された e_λ は Ginzburg-Landau energy density と 呼ばれる。

Remark 3 (変分問題との関連) (1) は 以下の汎関数 I_λ の Euler-Lagrange 方程式である。即ち$u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ に 対し、I_λ を

$$I_\lambda(u) \;:=\; \frac{1}{2}\int_\Omega\Big(|\nabla u|^2 \,+\, \frac{\lambda}{2}\left(|u|^2 \,-\, 1\right)^2\Big)\,dx$$

で 与える時、u_λ は 以下を満たす。任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ に 対し、

$$\begin{aligned}&\frac{dI_\lambda}{d\epsilon}(u_\lambda+\epsilon\phi)\bigg|_{\epsilon=0}\\ &= \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega(-\Delta u^i \,+\, \lambda(|u|^2-1)u^i)\cdot\phi^i\,dx \;=\; 0.\end{aligned}$$

さて $A_{u_0} = \{u \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^d), \,;\, u = u_0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とおき、

$$I_\lambda(u_\lambda) \;=\; \inf_{A_{u_0}} I_\lambda(u)$$

となる写像 $u_\lambda \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ (しばしば minimizer と呼ばれる) を見付けると、この u_λ は 広義の境界値の意味で境界上 $u_\lambda = u_0$ であり (1) を 満たすことが分る。したがって minimizer u_λ は GL である。更に u_λ が 以下を満たす事は 容易に示される。

$$u_\lambda \in C^\infty(\Omega), \quad \text{ただし 定数は } \lambda \text{ に 依存する.} \tag{5}$$

$$|u_\lambda| \;\le\; |u_0| \;=\; 1 \qquad \text{in} \quad \Omega, \tag{6}$$

${}^{\forall}C_r(x_0) \subset {}^{\forall}C_R(x_0) \subset\subset \Omega$に 対して

$$\frac{1}{r^{d-2}}\int_{C_r(x_0)} e_\lambda(u_\lambda)\,dx \;\le\; \frac{1}{R^{d-2}}\int_{C_R(x_0)} e_\lambda(u_\lambda)\,dx. \tag{7}$$

但し $C_r(x_0)$ は 中心が x_0, 一辺の長さが r の cube であるとする。

$$I_\lambda(u_\lambda) \;\le\; I_\lambda(u_0) \;=\; \frac{1}{2}\int_\Omega\Big(|\nabla u_0|^2 \,+\, \frac{\lambda}{2}\left(|u_0|^2 \,-\, 1\right)^2\Big)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx. \tag{8}$$

λ の適当な部分列 $\lambda(\nu)$ が存在して,

$$u_{\lambda(\nu)} \to {}^{\exists}u_\infty \in W^{1,2}, \quad |u_{\lambda(\nu)}| \to 1 \quad \text{a.e} \tag{9}$$

u_∞ は $\triangle u_\infty + |\nabla u_\infty|^2 u_\infty = 0$ を 超関数の 意味で満たす。

2 Nonlinear Fefferman-Phong's Inequality(NFPI)

Theorem 1 (Fefferman-Phong の不等式) Q_0 を d-次元 ユークリッド空間の cube とする。$f \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(Q_0)$, $g \in L^1(Q_0)$ であって 更に g は 以下を満たすとする:

$$^\exists C_1 > 0 \quad \text{s.t} \quad \int_Q |g|\, dx \leq C_1 (\operatorname{diam} Q)^{d-2} \qquad (^\forall\text{cube} \quad Q \subset\subset Q_0), \tag{10}$$

$$^\exists C_2 > 0, \quad 0 < {}^\exists\alpha \quad \text{s.t} \quad \frac{1}{|E|^\alpha}\int_E |g|\, dx \leq \frac{C_2}{|Q|^\alpha}\int_Q |g|\, dx \tag{11}$$

for $^\forall$ measurable set $E \subset {}^\forall$cube $Q \subset\subset Q_0$.

この条件のもとで 以下の不等式が成立する。

$$^\exists C = C(C_1, C_2) > 0 \quad \text{s.t} \quad \int_{Q_0} |f|^2 g\, dx \leq C \int_{Q_0} |\nabla f|^2\, dx. \tag{12}$$

Remark 4 g が Reverse Hölder inequality を満たす : $^\exists\, \delta > 0 \quad$ s.t

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q g^{1+\delta}\, dx\right)^{1/(1+\delta)} \leq \frac{^\exists C}{|Q|}\int_Q g\, dx \tag{13}$$

$\Longrightarrow \qquad g$ は (11) を満たす。

Remark 5 "方程式の regularity の研究" において、(7) 及び (13) (正確には この不等式と 少し違った形のものが 用いられる。) は 非常に重要な役割を果して来た。と言うより誤解を恐れずに言えば、今までの regularity の研究は、これらの不等式が成り立つ様な超関数解に対する regularity を 主な研究対象として来たと言っても良いかも知れない。ここで方程式の regularity の研究とは、いわいる弱解 (超関数解) が古典解になるかどうかについての 研究の事を言う。

筆者は、Ginzburg-Landau energy density e_λ に対し 以下の不等式が成立することに着目した。

Theorem 2 (Nonlinear Fefferman-Phong の不等式) e_λ を Ginzburg-Landau energy density とする。$1 < p < 2$, $\kappa > 0$ を 任意に与え固定する。

$e_\lambda^{(\kappa)} := \max\{e_\lambda - \kappa, 0\}$ と置く。

全ての cube $C_R(x_0) \subset\subset \Omega$ に 対して

$$\begin{aligned}\int_{C_R(x_0)} &\left(\left(e_\lambda^{(\kappa)}\right)^{p/2}\right)^{2+2/p} dx \\ &\leq \frac{C}{R^{d-2}}\int_{C_R(x_0)} e_\lambda\, dx \cdot \left(\int_{C_R(x_0)} |\nabla \left(e_\lambda^{(\kappa)}\right)^{p/2}|^2\, dx\right).\end{aligned} \tag{14}$$

但し、C は 正の generic な定数であるとする。また 簡単の為に $e_\lambda^{(\kappa)}\Big|_{\partial C_R} = 0$ とする。この事は 以後全ての計算に おいて仮定される。

<u>(14) の読み方.</u>

$A \sim B$ は、A と B が R に関し同じオーダーを持つことを表わす事にする。

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_R(x_0)} \left(\left(e_\lambda^{(\kappa)}\right)^{p/2} \right)^2 \left(\left(e_\lambda^{(\kappa)}\right)^{p/2} \right)^{2/p} dx \\
&\qquad\qquad\qquad \left(e_\lambda \sim \frac{1}{R^d} \int_{C_R(x_0)} e_\lambda \, dx \ \ (R > 0 \quad \text{十分小と思う}) \right) \\
&\sim \int_{C_R(x_0)} \left(\left(e_\lambda^{(\kappa)}\right)^{p/2} \right)^2 dx \cdot \frac{1}{R^d} \int_{C_R(x_0)} e_\lambda \, dx \\
&\leq C \int_{C_R(x_0)} |\nabla \left(e_\lambda^{(\kappa)}\right)^{p/2}|^2 \, dx \cdot \frac{1}{R^{d-2}} \int_{C_R(x_0)} e_\lambda \, dx \qquad (\because \text{Poincaré の不等式}).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
f := \left(e_\lambda^{(\kappa)}\right)^{p/2}, \quad g := e_\lambda
$$

と見ると Fefferman-Phong の不等式の形をしている。

Remark 6 Theorem 2 の証明は、 energy density の単調性と呼ばれる不等式 (7) が成立することと、 上の読み方の所で 現れた f と g との level set がある意味で compatible になっている事が 鍵である。ここで (7) は Theorem 1 の Fefferman-Phong の不等式が 成立する為の g $(:= e_\lambda)$ の 条件 (10) 及び (11) と類似しているが、(7) は その式の左辺が cube でしか成立していない事に対し (11) の左辺は全ての可測集合上で成り立つ事を要求している事に注意されたい。この違いが 実際どれほどのものであるのかは、筆者には 今の所 分からない。

3 Main Results

Theorem 3 (Uniform boundedness of e_λ w.r.t λ) ある正の数 ϵ_0 が 存在して、全ての $C_R \subset\subset \Omega$ に 対して

$$\frac{1}{R^{d-2}}\int_{C_R} e_\lambda\, dx < \epsilon_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname*{ess\cdot sup}_{C_R} e_\lambda \le \frac{C}{R^2}.$$

Theorem 4

$$\mathbf{Reg} := \bigcup_{R>0}\bigcup_{\lambda_0=1}^{\infty}\bigcap_{\lambda=\lambda_0}^{\infty}\left\{x_0\in\Omega;\ \frac{1}{R^{d-2}}\int_{C_R} e_\lambda\, dx < \epsilon_0,\quad C_R(x_0)\subset\subset\Omega\right\}$$

$\Longrightarrow$ **Reg** は Ω の 相対閉集合であり、

$\mathcal{H}^{d-2}\Big(\Omega\setminus\mathbf{Reg}\Big) < +\infty.$

Corollary 1 $x_0\in\mathbf{Reg}$ ならば、ある $R_0 = R_0(x_0) > 0$ と $\lambda_0 = \lambda_0(x_0) > 0$ が 存在して、全ての $\lambda > \lambda_0$ に 対して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R^{d-2}}\int_{C_R} e_\lambda\, dx < \epsilon_0\\
\Longrightarrow\quad & \operatorname*{ess\cdot sup}_{C_R}\left(\frac{1}{2}|\nabla u_\lambda|^2 + \frac{\lambda}{4}(|u_\lambda|^2-1)^2\right) \le \frac{C}{R^2}\\
\Longrightarrow\quad & 1-\sqrt{\frac{C}{\lambda R_0^2}} \le |u_\lambda|^2 \qquad \text{on } {}^\forall x\in C_{R_0}(x_0).
\end{aligned}$$

即ち、λ を 十分大きくすれば、$|u_\lambda| \fallingdotseq 1$.

Theorem 3,4 及び Corollary 1 より 次が言える。

Theorem 5 (Main) *Ginzburg-Landu energy density* e_λ は $(d-2)$-ハウスドルフ次元を持つ相対閉集合を除いて、λ に関し一様有界であり、λ が 十分大きければ $|u_\lambda|$ は ゼロにはならない。 $d=2$ の時を考えれば 非超電導状態でない。

Proof of theorem 3

e_λ が DeGiorgi class に属する事を 示す。即ち 任意の $\kappa > 0$ に 対して

$$\int_{A_R^{(\kappa)}(x_0)} |\nabla (e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}|^2\, dx \;\le\; C\kappa^{p+1}|A_R^{(\kappa)}(x_0)| \tag{15}$$

が 成り立つ事を 示せば良い。ここで $A_R^{(\kappa)}(x_0) := \{x \in C_R(x_0)\,;\, e_\lambda > \kappa\}$ である。もし上の式 (15) が示されれば、Ladyzenskaya- Ural'ceva の定理に依って、 $e_\lambda \le C/R^2$ が言える。以下、 これを認めて e_λ が (15) を満たす事を示そう。

$\because$) まず、Bochner inequality を 思い出そう。

$$-\triangle e_\lambda \;\le\; Ce_\lambda^2.$$

その両辺に $(e_\lambda^{(\kappa)})^{p-1}$ を 掛け合わせ、それを C_R 上 積分して 以下が得られる。

$$-\int_{C_R} \triangle e_\lambda (e_\lambda^{(\kappa)})^{p-1}\, dx \;\le\; C\int_{C_R} e_\lambda^2 (e_\lambda^{(\kappa)})^{p-1}\, dx.$$

上式の左辺を部分積分して、$e_\lambda^{(\kappa)}$ の定義を思い出す事で

$$\begin{aligned}
&\int_{C_R(=A_R^{(\kappa)})} |\nabla (e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}|^2\, dx \\
&\le C\int_{C_R} (e_\lambda^{(\kappa)})^{p+1}\, dx + C\kappa^2\int_{C_R} (e_\lambda^{(\kappa)})^{p-1}\, dx \\
&\le C\kappa^{p+1}|A_R^{(\kappa)}| + C\int_{C_R} (e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2\cdot 2/p(p+1)}\, dx \\
&\qquad\qquad\qquad \| \\
&\qquad\qquad C\int_{C_R} \left((e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}\right)^{2+2/p} dx \\
&\qquad\qquad\qquad \text{I}\!\wedge \\
&\text{(NFPI に依って)}\, \frac{C}{R^{d-2}}\int_{C_R} e_\lambda\, dx \cdot \int_{C_R} |\nabla (e_\lambda^{(\kappa)})^{p/2}|^2\, dx.
\end{aligned}$$

ここで 定理の仮定より $\dfrac{C}{R^{d-2}}\displaystyle\int_{C_R} e_\lambda\, dx \le C\epsilon_0$ であり この $C\epsilon_0$ を 1/2 より 小になるように ϵ_0 を取れば求める式が 得られる。

References

[1] F.Bethuel, H.Brezis and F.Hélein, Ginzburg-Landau vortices, Progr. Nonlin. Diff. Eq. Appl., **13** (1994), Birkhäuser.

[2] J.García.Cuerva and J.L.Rubio De Francia, Weighted Norm Inequalities and Related Topics, (1985), North-Holland.

[3] C.Fefferman and D.H.Phong, Lower bound for Schrödinger equations, Conference on Partial Differential Equations (Saint Jean de Monts), (1982).

[4] K.Horihata, The evolution of harmonic maps, Tohoku Math. Publ., (1999).

[5] O.A.Ladyzhenskaya and N.N.Ural'ceva, Linear and quasi linear Elliptic Equations, (1968), Academic Press.

[6] 恒藤敏彦、超流動・超電導、岩波講座・現代の物理学 **17** (1993), 岩波書店.